Circuits linéaires du 1^{er}ordre en régime transitoire

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

lundi 4 octobre 2021

Circuits du 1erordre

- un seul comportement caractérisé par un seul paramètre : la constante de temps
- les résultats sont universels et se retrouvent dans tout système dynamique régi par une équation différentielle du 1erdegré linéaire
- résoudre l'équation différentielle = trouver l'évolution temporelle de la grandeur étudiée en fonction des conditions initiales
- transposable immédiatement à d'autres phénomènes : décroissance radioactive, cinétiques chimiques d'ordre 1, désexcitation d'un atome, équilibrage de niveaux d'eau (tuyaux étroits)
- on va le traiter pour le circuit RC, on adaptera pour le circuit RL

Équations différentielles

- une équation différentielle est une équation portant sur une fonction y et ses dérivées. Pour une grandeur y variant temporellement :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{t^2}{t_0^2} y^2 = \cos(\sin(\omega t)) \qquad \frac{\mathrm{d}^1 y}{\mathrm{d}t^1} + \frac{y}{\tau} = \frac{y_0}{\tau} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y = \omega^2 y_0 \cos(\omega t)$$

- résoudre cette équation consiste à trouver une fonction $y(t)$ qui, pour tout t, vérifie l'équation
- elle est linéaire si y et ses dérivées n'interviennent que multipliées par des scalaires (éventuellement variables) mais pas par d'autres dérivées de y
- l'ordre de l'équation différentielle est l'ordre de dérivation maximal intervenant
- on cherchera des solutions vérifiant des conditions initiales :
  - $y(0) = y_0$ pour une équation d'ordre 1
  - $y(0) = y_0$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y'_0$ pour une équation d'ordre 2
  - dans les conditions qu'on rencontrera il existera une infinité de solutions mais une seule vérifiant les conditions initiales
  - on connaît déjà la chute libre, l'oscillateur harmonique, la cinétique chimique…

Définitions

Définition (Régimes établis)

On définit les régimes établis (aussi appelés permanents)

stationnaire : dans lequel les grandeurs électrocinétiques (u, i, q) sont stationnaires,

sinusoïdal établi : dans lequel elles varient toutes sinusoïdalement à la même pulsation ω : $u(t) = U_m \cos \omega t$.

Définitions

Définition (Régimes transitoire et libre)

On nomme régime transitoire l'évolution d'un système entre deux régimes établis. Pour un dipôle, Il s'agit d'une charge (resp. décharge) si l'énergie (électrostatique ou magnétique) du dipôle croît (resp. décroît).
On nomme régime libre l'évolution en l'absence de source d'énergie.

Définitions

Définition (Ordre d'un circuit)

Un circuit linéaire est dit *du pe ordre* si ses grandeurs électrocinétiques obéissent à une équation différentielle linéaire du pe ordre.

Fonction échelon

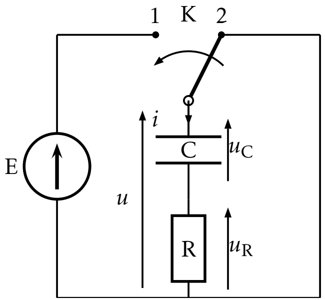
Définition (Fonction échelon)

On nomme échelon (fonction de Heaviside) la fonction discontinue en 0 définie par :

$$t < 0 : H(t) = 0 \qquad t \geqslant 0 : H(t) = 1$$

On appelle réponse à un échelon d'une grandeur l'évolution temporelle de cette grandeur dans un système soumis à une excitation constante par morceaux et discontinue. La grandeur étudiée est alors solution d'une équation différentielle dont le second membre s'exprime à l'aide de la fonction échelon.

Exemple charge d'un condensateur initialement déchargé



la charge $q(t) = 0$ pour $t < 0$, interrupteur basculé à $t = 0$; le système est descriptible par les équations différentielles :

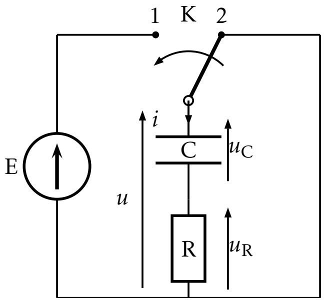
$$t < 0 \quad RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$t \geqslant 0 \quad RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E,$$

soit :

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = EH(t) \forall t.$$

Exemple charge d'un condensateur initialement déchargé



la charge $q(t) = 0$ pour $t < 0$, interrupteur basculé à $t = 0$; le système est descriptible par les équations différentielles :

$$t < 0 \quad RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$$

$$t \geqslant 0 \quad RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E,$$

soit : $$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = EH(t)\forall t.$$

on sait résoudre pour $t<0 $ et $t \geqslant 0$ séparément, il restera à raccorder les deux solutions

Portraits de phase

Définition (Portraits de phase)

On nomme espace des phases d'une grandeur x qui évolue temporellement le plan d'abscisse x et d'ordonnée $\dot{x}$.
Une courbe $x(t), \dot{x}$ particulière est une trajectoire dans l'espace des phases.
La représentation de différentes trajectoires constitue un portrait de phase.

Exemples

Portraits de phase

Définition (Portraits de phase)

On nomme espace des phases d'une grandeur x qui évolue temporellement le plan d'abscisse x et d'ordonnée $\dot{x}$.
Une courbe $x(t), \dot{x}$ particulière est une trajectoire dans l'espace des phases.
La représentation de différentes trajectoires constitue un portrait de phase.

Exemples

- pour un circuit RC, on a $u_c, \dot{u}_c$, même allure que u_c, i_c

Portraits de phase

Définition (Portraits de phase)

On nomme espace des phases d'une grandeur x qui évolue temporellement le plan d'abscisse x et d'ordonnée $\dot{x}$.
Une courbe $x(t), \dot{x}$ particulière est une trajectoire dans l'espace des phases.
La représentation de différentes trajectoires constitue un portrait de phase.

Exemples

- pour un circuit RC, on a $u_c, \dot{u}_c$, même allure que u_c, i_c
- pour un circuit LR, on a $i_L, \dot{i}_L$, même allure que i_L, u_L

Portraits de phase

Définition (Portraits de phase)

On nomme espace des phases d'une grandeur x qui évolue temporellement le plan d'abscisse x et d'ordonnée $\dot{x}$.
Une courbe $x(t), \dot{x}$ particulière est une trajectoire dans l'espace des phases.
La représentation de différentes trajectoires constitue un portrait de phase.

Exemples

- pour un circuit RC, on a $u_c, \dot{u_c}$, même allure que u_c, i_c
- pour un circuit LR, on a $i_L, \dot{i_L}$, même allure que i_L, u_L
- pour un oscillateur harmonique unidimensionnel $x, \dot{x}$

Portraits de phase

Définition (Portraits de phase)

On nomme espace des phases d'une grandeur x qui évolue temporellement le plan d'abscisse x et d'ordonnée $\dot{x}$.
Une courbe $x(t), \dot{x}$ particulière est une trajectoire dans l'espace des phases.
La représentation de différentes trajectoires constitue un portrait de phase.

le portrait de phase permettra de déduire certaines propriétés générales du système sans résoudre l'équation différentielle

Propriétés générales

Caractéristiques

- le sens de parcours est déterminé dans chaque quadrant : la trajectoire est parcourue dans le sens horaire
- elle intersecte l'axe $\dot{x} = 0$ orthogonalement (si la dérivée seconde $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ est non nulle à cet instant)

Équation canonique

Équation canonique

Toutes les grandeurs électrocinétiques d'un circuit linéaire du premier ordre obéissent, en régime transitoire vers un état stationnaire, à la même équation dite canonique. On a :

$$\dot{x} + \frac{x}{\tau} = \frac{X_\infty}{\tau},$$

où :

- x est une tension, intensité, charge…
- $\tau > 0$ est la constante de temps du circuit,
- X_∞ est la valeur asymptotique de x en régime stationnaire, déterminée en utilisant les modèles asymptotiques des dipôles en régime stationnaire.
- pour une charge de condensateur : $u_{c\infty} = E$, pour une décharge $u_{c\infty} = 0$.

Équation canonique

Constante de temps d'un circuit RC

La constante de temps d'un dipôle RC série est $\tau = RC$.

Équation canonique

Constante de temps d'un circuit RC

La constante de temps d'un dipôle RC série est $\tau = RC$.

- croît avec R et C
- typiquement : $R = 1\,\mathrm{k}\Omega, C = 1\,\mu\mathrm{F} \rightarrow \tau = 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$
- souvent très rapide : à observer à l'oscilloscope

Une simple droite

- on a $\dot{x} = -(x - X_\infty)/(\tau)$: droite de pente $-1/(\tau)$ dans l'espace des phases

Une simple droite

- on a $\dot{x} = -(x - X_\infty)/(\tau)$: droite de pente $-1/(\tau)$ dans l'espace des phases
- pour un système de τ donné, seul le point de départ changera avec les conditions initiales

Interprétation

- $x = X_\infty$ est un point stable car $\dot{x}$ y est nul et pour $x \neq X_\infty$, $\dot{x}$ est de signe opposé à $x - X_\infty$: le système se « dirige » vers $x = X_\infty$

Interprétation

- $x = X_\infty$ est un point stable car $\dot{x}$ y est nul et pour $x \neq X_\infty$, $\dot{x}$ est de signe opposé à $x - X_\infty$: le système se « dirige » vers $x = X_\infty$
- $\dot{x}$ est d'autant plus élevé que x est loin de X_∞ : on ralentit quand on se rapproche de X_∞

Interprétation

- $x = X_\infty$ est un point stable car $\dot{x}$ y est nul et pour $x \neq X_\infty$, $\dot{x}$ est de signe opposé à $x - X_\infty$: le système se « dirige » vers $x = X_\infty$
- $\dot{x}$ est d'autant plus élevé que x est loin de X_∞ : on ralentit quand on se rapproche de X_∞
- on est immobile « quand » on arrive à $x = X_\infty$: on ne dépasse jamais $x = X_\infty$

Interprétation

- $x = X_\infty$ est un point stable car $\dot{x}$ y est nul et pour $x \neq X_\infty$, $\dot{x}$ est de signe opposé à $x - X_\infty$: le système se « dirige » vers $x = X_\infty$
- $\dot{x}$ est d'autant plus élevé que x est loin de X_∞ : on ralentit quand on se rapproche de X_∞
- on est immobile « quand » on arrive à $x = X_\infty$: on ne dépasse jamais $x = X_\infty$

Interprétation

- $x = X_\infty$ est un point stable car $\dot{x}$ y est nul et pour $x \neq X_\infty$, $\dot{x}$ est de signe opposé à $x - X_\infty$: le système se « dirige » vers $x = X_\infty$
- $\dot{x}$ est d'autant plus élevé que x est loin de X_∞ : on ralentit quand on se rapproche de X_∞
- on est immobile « quand » on arrive à $x = X_\infty$: on ne dépasse jamais $x = X_\infty$
- le portrait de phase ne renseigne pas directement sur les durées

Interprétation

- $x = X_\infty$ est un point stable car $\dot{x}$ y est nul et pour $x \neq X_\infty$, $\dot{x}$ est de signe opposé à $x - X_\infty$: le système se « dirige » vers $x = X_\infty$
- $\dot{x}$ est d'autant plus élevé que x est loin de X_∞ : on ralentit quand on se rapproche de X_∞
- on est immobile « quand » on arrive à $x = X_\infty$: on ne dépasse jamais $x = X_\infty$
- le portrait de phase ne renseigne pas directement sur les durées
- on va voir qu'il faut un temps infini pour atteindre X_∞

Résolution

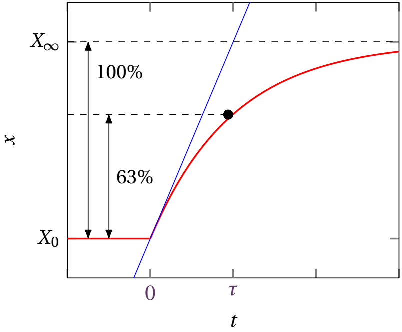
Théorème (Solution de l'équation différentielle canonique)

L'unique solution de l'équation canonique du premier ordre vérifiant $x(0) = X_0$ se met sous la forme :

$$x(t) = X_\infty + (X_0 - X_\infty)\, e^{-t/\tau}.$$

X_∞ est indépendant des conditions initiales, au contraire de X_0

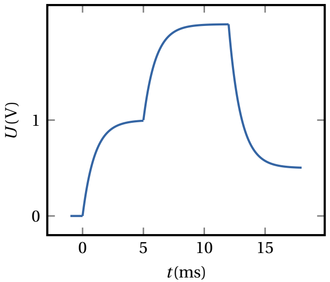
Courbe



- la tangente à l'origine à une courbe de relaxation exponentielle coupe son asymptote en $t = \tau$
- en $t = \tau$, une courbe d'amortissement exponentiel a parcouru 63% de $|X_0 - X_\infty|$
- on considérera souvent qu'on a « atteint » l'asymptote pour $t = 5\tau$, où $x - X_\infty = 0{,}7\%$ de $X_\infty - X_0$

Exercice

1. Tracer l'allure de la courbe $u_c(t)$ si le condensateur a une capacité $C = 1\,\mu\text{F}$, porte initialement la charge $Q = 5 \cdot 10^{-6}\,\text{C}$, et qu'on l'alimente avec une alimentation stabilisée avec $E = -2\,\text{V}$, au travers d'une résistance $R = 1\,\text{k}\Omega$.
2. En déduire la valeur de $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ à $t = 0$.
3. Sur la courbe ci-contre, distinguer les différents régimes transitoires et établis (ou permanents).



Conditions initiales

Continuité de l'énergie

Les conditions initiales de l'équation différentielle sont déterminées par la continuité de l'énergie emmagasinée par le dipôle. Dans un condensateur, la charge q et la tension u_C seront toujours continues.

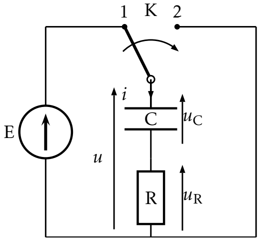
Conditions initiales

Continuité de l'énergie

Les conditions initiales de l'équation différentielle sont déterminées par la continuité de l'énergie emmagasinée par le dipôle. Dans un condensateur, la charge q et la tension u_C seront toujours continues.

☠ en revanche, l'intensité du courant dans un condensateur peut être discontinue

Exercice : Charge et décharge d'un condensateur

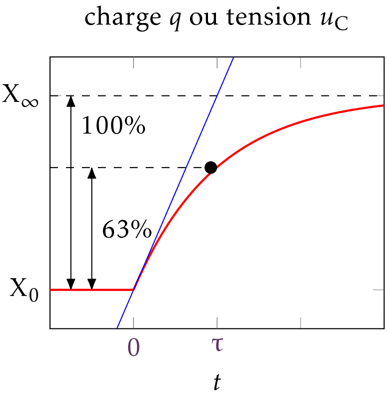


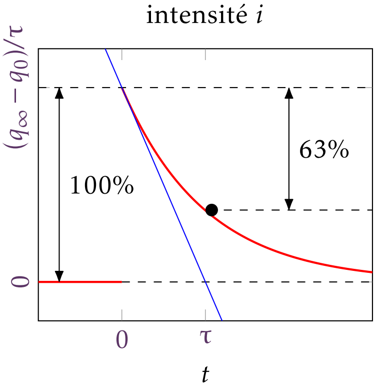
1. Déterminer, en utilisant les modèles asymptotiques des dipôles en régime stationnaire, les valeurs de i, u_R, u_C et de q quand l'interrupteur est en position 1 et quand il est en position 2 depuis longtemps.
2. a. K est en position 2 depuis un temps long. Il est basculé en 1 à $t = 0$. Déterminer $u_C(t), q$ et $i(t)$.
   b. K est en position 1 depuis un temps long. Il est basculé en 2 à $t = 0$. Déterminer $u_C(t)$ et $i(t)$.
3. On rajoute un résistor de résistance R' en parallèle du condensateur. Le circuit a désormais deux mailles. Déterminer la nouvelle constante de temps du circuit et la nouvelle valeur maximale de u_C et en déduire l'allure de la courbe.
4. Préciser, parmi les grandeurs i, u_C, q, u, lesquelles sont continues.

Correction

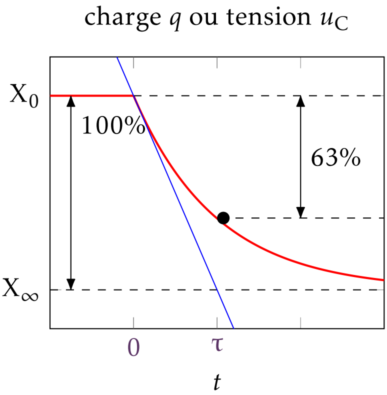
1. position 1 $U_c = U = E,\ I = 0,\ U_R = 0.$
   position 2 $U_c = U = U_R = 0,\ I = 0.$
2. charge $u_C = E(1 - e^{-t/\tau}), i = \frac{E}{R} e^{-t/\tau},$
   décharge $u_C = E e^{-t/\tau},\ i = -\frac{E}{R} e^{-t/\tau}.$
3. - On peut utiliser les lois de Kirchhoff pour établir l'équation vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.
   - Des transformations Thévenin/Norton permettent de montrer que $\tau' = \tau R'/(R+R')$ et $u_{c,\max} = ER'/(R+R')$
4. Seules q et u_C sont continues, la discontinuité de i se transmet à u_R et U.

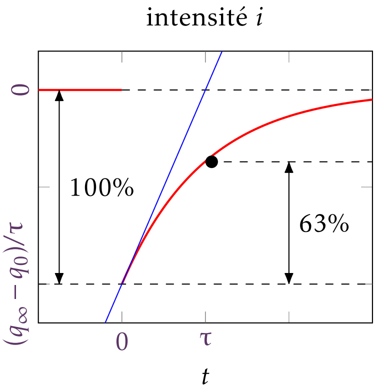
Courbes générales : charge





Courbes générales : décharge





Décharge

Dissipation de l'énergie

Lors de la décharge d'un dipôle RC série, l'énergie électrostatique initialement stockée est entièrement dissipée par effet Joule dans le résistor.

Décharge

Dissipation de l'énergie

Lors de la décharge d'un dipôle RC série, l'énergie électrostatique initialement stockée est entièrement dissipée par effet Joule dans le résistor.

- si R est la résistance d'une lampe : production de lumière (flash)
- on peut également utiliser des supercondensateurs pour faire fonctionner un moteur

Charge

Accumulation d'énergie

Lors de la charge, sous la tension E constante, d'un dipôle série RC de $u_C = 0$ à $u_C = E$, le générateur fournit une énergie $\mathscr{E}_{\text{gen}}$ au dipôle qui se répartit pour moitié entre :

- l'énergie électrostatique $\mathscr{E}_{\text{élec}} = \frac{CE^2}{2}$, emmagasinée dans le condensateur,
- l'énergie dissipée par effet Joule dans le résistor $\mathscr{E}_{\text{J}}$.

$$\mathscr{E}_{\text{gen}} = \mathscr{E}_{\text{élec}} + \mathscr{E}_{\text{J}} \quad \mathscr{E}_{\text{J}} = \mathscr{E}_{\text{élec}} = \mathscr{E}_{\text{gen}}/2.$$

Charge

Accumulation d'énergie

Lors de la charge, sous la tension E constante, d'un dipôle série RC de $u_C = 0$ à $u_C = E$, le générateur fournit une énergie $\mathscr{E}_{\text{gen}}$ au dipôle qui se répartit pour moitié entre :

- l'énergie électrostatique $\mathscr{E}_{\text{élec}} = \frac{CE^2}{2}$, emmagasinée dans le condensateur,
- l'énergie dissipée par effet Joule dans le résistor $\mathscr{E}_{\text{J}}$.

$$\mathscr{E}_{\text{gen}} = \mathscr{E}_{\text{élec}} + \mathscr{E}_{\text{J}} \quad \mathscr{E}_{\text{J}} = \mathscr{E}_{\text{élec}} = \mathscr{E}_{\text{gen}}/2.$$

☠ on perdra toujours 50% d'énergie lors de la charge

Points communs et différences entre le RL et le RC

1. Proposer un montage permettant d'étudier la « charge » et la « décharge » d'un dipôle RL, utilisant entre autres un générateur idéal de tension.
2. Établir l'équation différentielle d'évolution de l'intensité. En déduire l'expression de la constante de temps. Comparer sa variation avec R au cas du dipôle RC.
3. Préciser quelle grandeur doit être continue et résoudre l'équation différentielle pour la charget et la décharge.
4. Tracer les allures des courbes correspondantes.

Indispensable

- déterminations des régimes asymptotiques avec les équivalents (interrupteurs ouverts ou fermés)
- forme générale de la solution du 1er ordre et sa courbe
- les interprétations énergétiques